

Séquence : 03

Document : TD01

Lycée Dorian

Renaud Costadoat

Françoise Puig



Avec Correction

Modélisation géométrique



Référence	S03 - TD01
Compétences	B2-14: Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
Description	Manipulation des vecteurs et paramétrage d'un système
Système	Machine de dépose joint

1 Rappels

1.1 Les bases du calcul vectoriel

Soit le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Question 1 : Calculer sa norme.

On donne le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Question 2 : Trouver y et z tels que les deux vecteurs soient colinéaires. Montrer que deux méthodes sont possibles mais vous en choisirez une seule pour la démonstration.

1.2 Produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 23 \\ -54 \\ 36 \end{pmatrix}$.

Question 1 : Calculer les normes de ces vecteurs.

Question 2 : Calculer le produit scalaire de ces vecteurs.

Question 3 : A partir des résultats précédents, calculer l'angle entre les deux vecteurs.

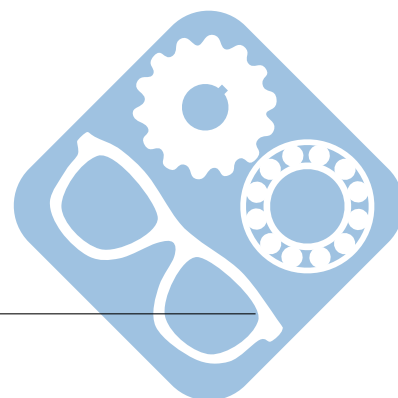
1.3 Produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Question 1 : Calculer les normes de ces vecteurs.

Question 2 : Calculer le produit vectoriel de ces vecteurs.

Question 3 : A partir des résultats précédents, calculer l'angle entre les deux vecteurs.



2 Étude géométrique machine de dépose joint liquide

2.1 Mise en situation

La société John Deere conçoit et fabrique du matériel agricole. L'usine, située dans le Loiret, est chargée de la fabrication et du montage des moteurs Diesel de 3, 4, ou 6 cylindres. Les photos de la figure 1 montrent la chaîne d'assemblage des moteurs, ceux-ci étant maintenus sur des balancelles. La pièce qui a pour fonction principale de collecter les gaz d'échappement issus des cylindres pour les envoyer vers le pot d'échappement s'appelle le collecteur d'échappement. Le sujet a pour thème l'étude du poste de dépose du joint liquide sur le collecteur d'échappement du moteur.

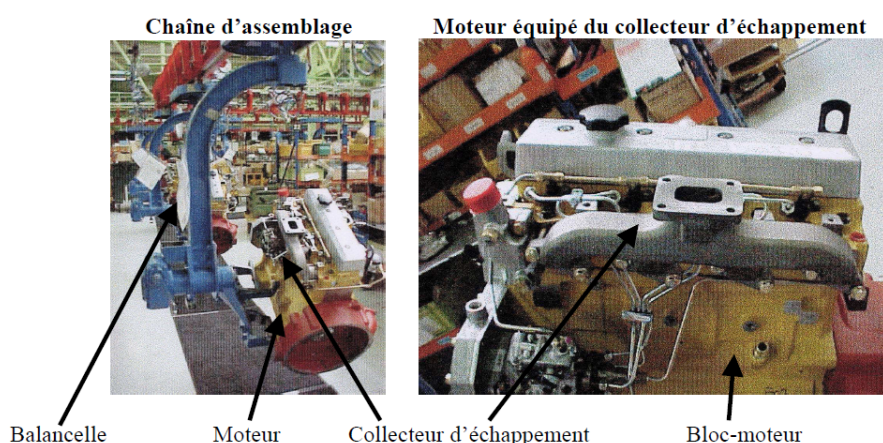


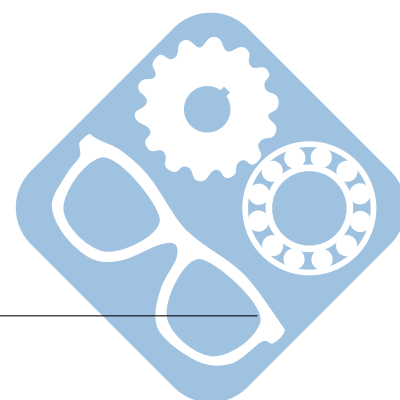
Figure 1 – Chaîne de fabrication

2.2 Présentation du système



Figure 2 – Joints déposés

Initialement, l'étanchéité aux gaz d'échappement entre le moteur et le collecteur d'échappement était réalisée par des joints métalliques. Leur mise en place était compliquée, l'étanchéité n'était pas optimale. C'est pourquoi, après plusieurs essais, la société John Deere a souhaité appliquer un nouveau procédé d'étanchéité réalisé par la dépose d'un joint liquide effectué sur une machine de dépose automatisée. Ces joints sont 10 fois moins onéreux, sont plus efficaces, et nécessitent une moins bonne qualité de surface des zones de contact entre moteur et collecteur, figure 1 et 2.



2.3 Analyse géométrique du robot

L'étude va porter sur le moment où le robot se déplace vers le premier trou (pige commune rouge et coordonnées connues et identiques quel que soit le type de collecteur). C'est l'action : déplacer robot trajectoire 1, présentée à la figure 3.

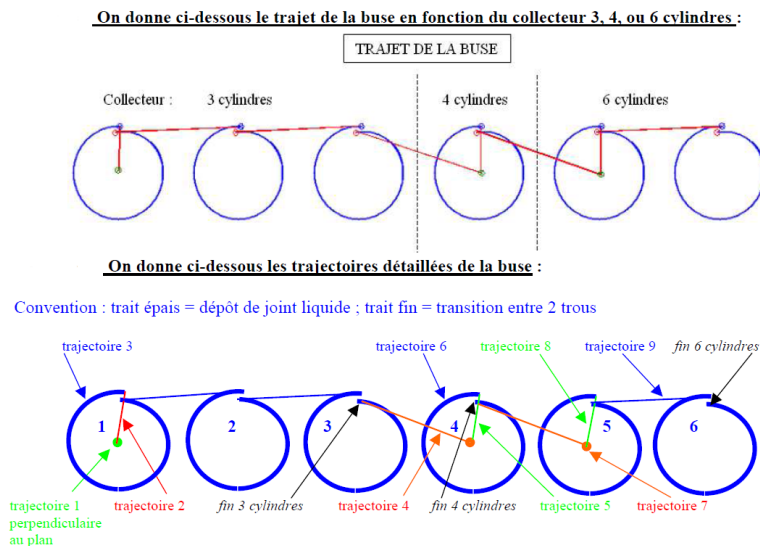


Figure 3 – Trajectoire 1

Deux vues du robot ABB, dont le bras supporte la buse de dépôt de joint liquide, sont représentées sur les figures 4 et 5 :

- Vue de face,
- Vue de dessus.

Dans ces 2 vues, on a représenté le robot avec : $\theta_{01} = \theta_{34} = \theta_{45} = \theta_{56} = 0^\circ$ et $\theta_{12} = -\theta_{23}$

Question 1 : Pourquoi on nomme un tel robot, un robot 6 axes.

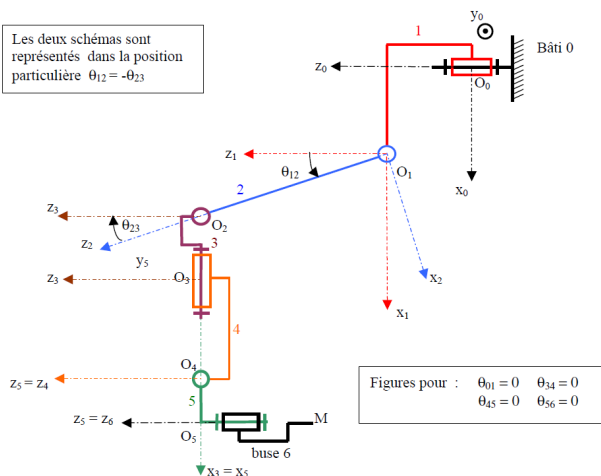


Figure 4 – Schéma cinématique 1

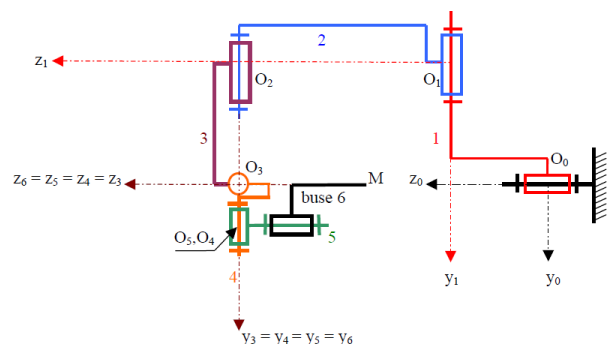


Figure 5 – Schéma cinématique 2

La figure 6 présente le robot en position « parking » : $\theta_{01} = -90^\circ$, $\theta_{12} = 14^\circ$ et $\theta_{23} = -14^\circ$

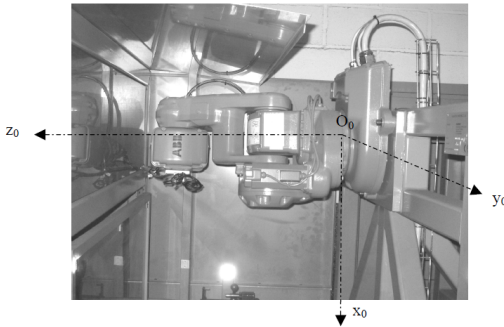


Figure 6 – Bras en position parking

Détermination du premier point de la trajectoire 1

On se propose de déterminer les coordonnées du premier point de la trajectoire de l'extrémité de la buse M dans $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: au début du mouvement de translation défini lors de la trajectoire 1. C'est le premier point que le point M, extrémité de la buse, devra rejoindre au début du programme de dépose du joint liquide. Le schéma cinématique donné sur les figures 4 et 5 a été effectué pour :

$$\theta_{01} = \theta_{34} = \theta_{45} = \theta_{56} = 0^\circ \text{ et } \theta_{12} = -\theta_{23}$$

On donne le paramétrage et les figures de calcul :

Paramétrage :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_0O_1} &= a.\vec{x}_1 + b.\vec{z}_0 - f.\vec{y}_1 & \overrightarrow{O_1O_2} &= c.\vec{z}_2 & \theta_{01} &= \left(\vec{x}_0, \vec{x}_1 \right) & \theta_{12} &= \left(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \right) \\ \overrightarrow{O_2O_3} &= d.\vec{x}_3 + f.\vec{y}_3 & \overrightarrow{O_3O_4} &= e.\vec{x}_3 + h.\vec{y}_4 & \theta_{23} &= \left(\vec{x}_2, \vec{x}_3 \right) & \theta_{34} &= \left(\vec{y}_3, \vec{y}_4 \right) \\ \overrightarrow{O_4O_5} &= g.\vec{x}_5 & \overrightarrow{O_5M} &= -h.\vec{y}_6 - l.\vec{z}_6 & \theta_{45} &= \left(\vec{z}_4, \vec{z}_5 \right) & \theta_{56} &= \left(\vec{y}_5, \vec{y}_6 \right) \end{aligned}$$

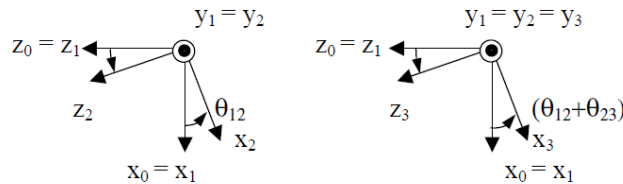
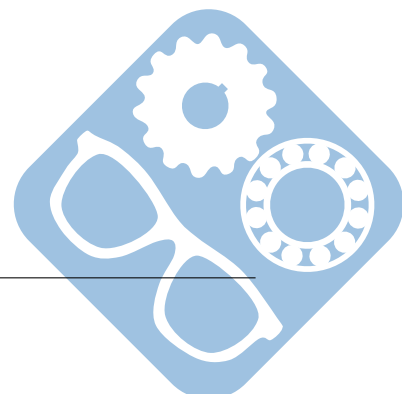


Figure 7 – Figures de calcul

Dans la position particulière du premier point de la trajectoire 1 de la buse, on a les angles suivants : $\theta_{01} = \theta_{34} = \theta_{45} = \theta_{56} = 0^\circ$.

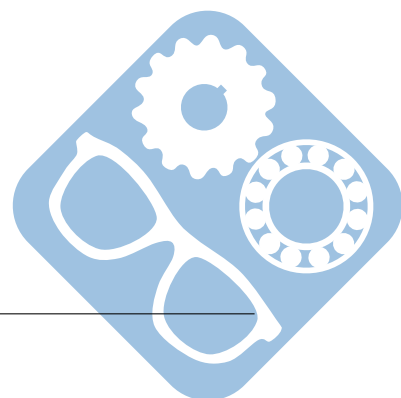
Question 2 : Déterminer pour la position particulière définie ci-dessus, en fonction du paramétrage donné, les vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{O_0O_1}$ en projection sur les axes $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$,
- $\overrightarrow{O_1O_2}$ en projection sur l'axe (\vec{z}_2) ,
- $\overrightarrow{O_2O_3}$ en projection sur les axes (\vec{x}_3, \vec{y}_0) ,
- $\overrightarrow{O_3O_4}$ en projection sur les axes (\vec{x}_3, \vec{y}_0) ,
- $\overrightarrow{O_4O_5}$ en projection sur l'axe (\vec{x}_3) ,
- $\overrightarrow{O_5M}$ en projection sur les axes (\vec{y}_0, \vec{z}_3) ,



Question 3 : Déterminer pour la position particulière définie ci-dessus, en fonction du paramétrage donné, le vecteur suivant :

- $\overrightarrow{O_0M}$ en projection sur les axes $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.



3 La chaise de dentiste : Bac STI (GE) 2006

3.1 Mise en situation



La chirurgie dentaire et ses spécificités opératoires nécessitent l'installation du patient dans une position couchée particulière (voir illustration ci-dessous). La société AIREL a donc développé un fauteuil d'opération ergonomique, véritable automate comportant toutes les commandes et les fonctions dont le praticien doit disposer, quelle que soit sa spécialité et ses contraintes opératoires.

Figure 8 – Fauteuil dans un cabinet

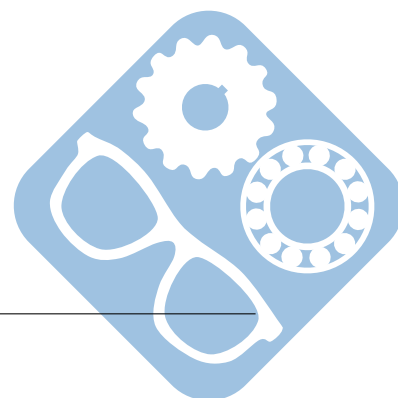
3.2 Présentation du système

Le système de levée du fauteuil, qui va être l'objet de notre étude, est composé d'un vérin ainsi que d'un système pantographe.

Il permet de piloter la montée et la descente du fauteuil afin de placer le patient à une hauteur adéquate afin que le médecin pratique son intervention dans les meilleures conditions possibles.



Figure 9 – Système de levée



3.3 Descriptif de la géométrie

La figure 10, montre les pièces du système numérotées.

- $\vec{AD} = a.\vec{x} + b.\vec{y}$,
- $\vec{DK} = 2.\vec{DC} = 2.c.\vec{x}_3$,
- $\vec{DB} = d.\vec{x}_3 + e.\vec{y}_3$,
- $\vec{AB} = l_1.\vec{x}_6$,
- $\vec{HE} = 2.\vec{HC} = 2.c.\vec{x}_4$.

La construction géométrique du système « 4 barres » permet de dire que :

- $\vec{DE} = \vec{HK} = l_2.\vec{y}$,
- $\vec{HD} = \vec{KE} = l_3.\vec{x}$,

Les distances a,b,c,d et e sont fixées par les dimensions du mécanisme. Les longueurs l_1 , l_2 et l_3 sont variables.

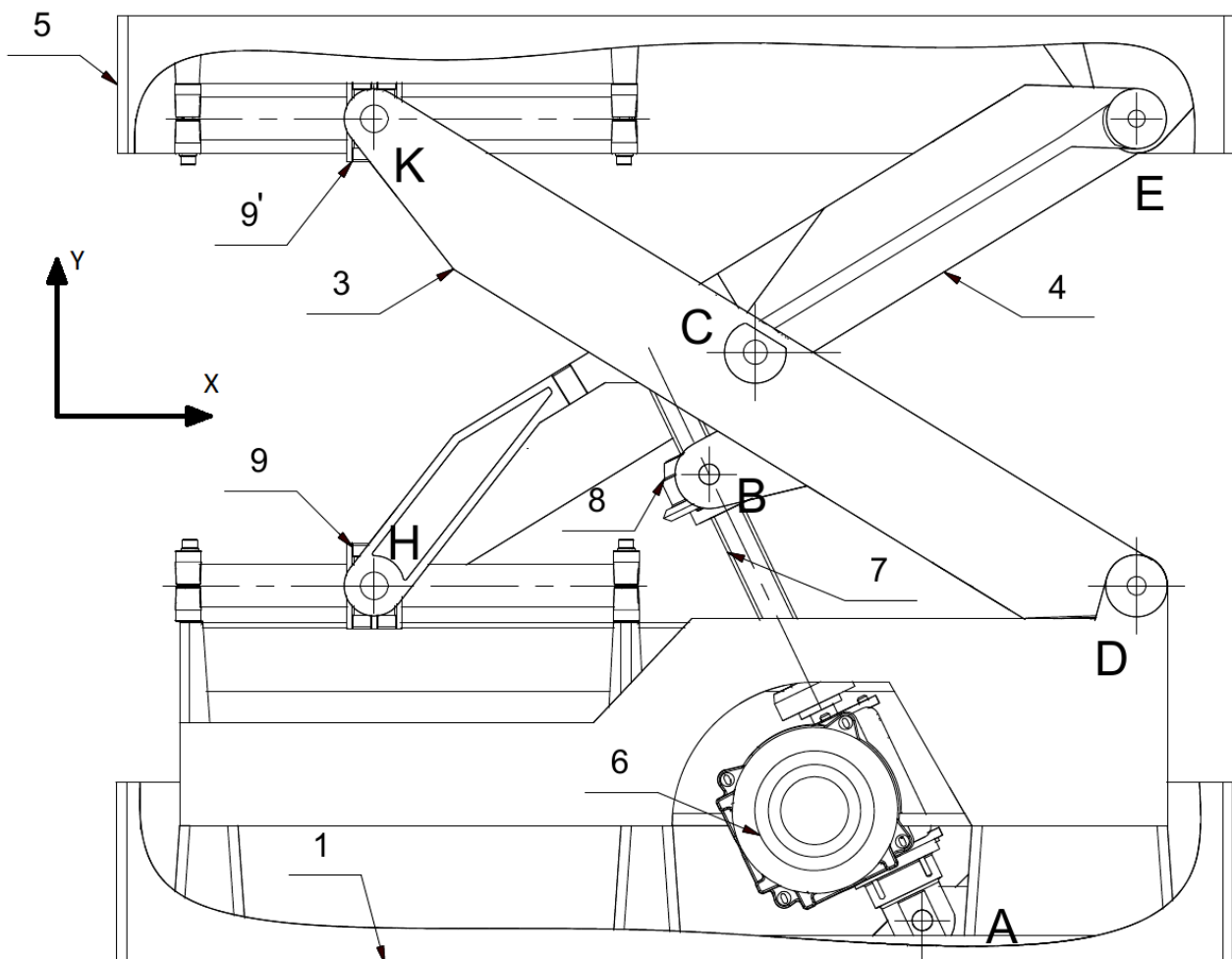
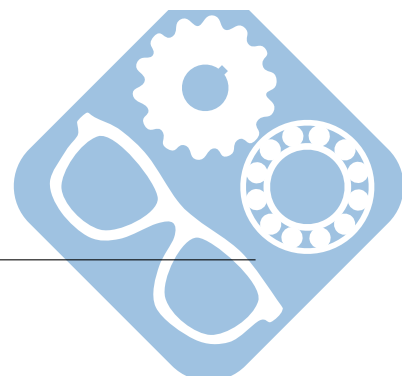


Figure 10 – Système de levée



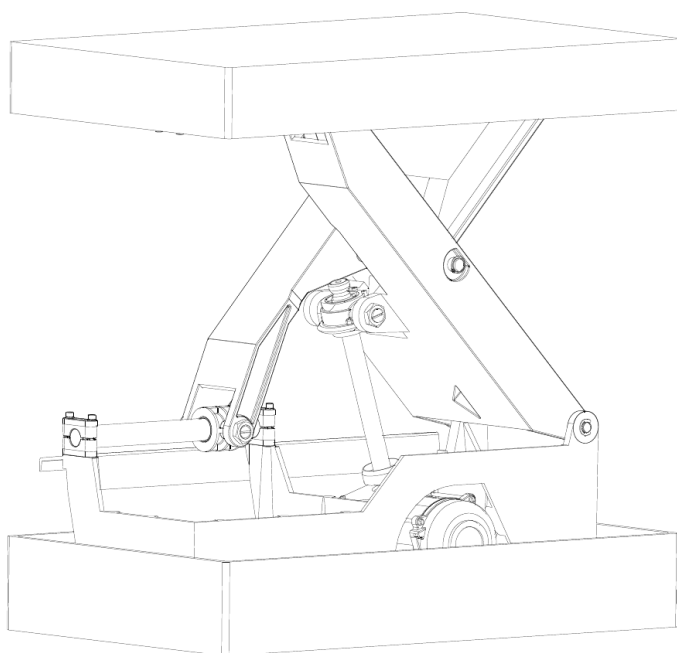


Figure 11 – Position haute

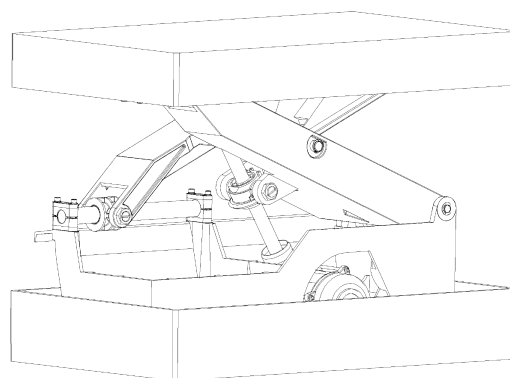


Figure 12 – Position intermédiaire

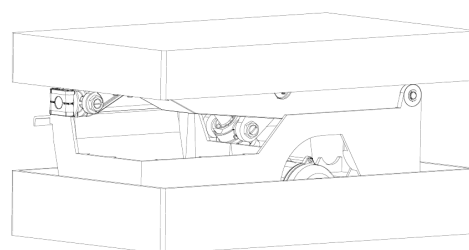


Figure 13 – Position basse

Question 1 : Mettre en place les repères suivants :

- $R_6(\vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ au point A,
- $R_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ au point D,
- $R_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ au point H.

Question 2 : Tracer les figures de changement de repère suivantes :

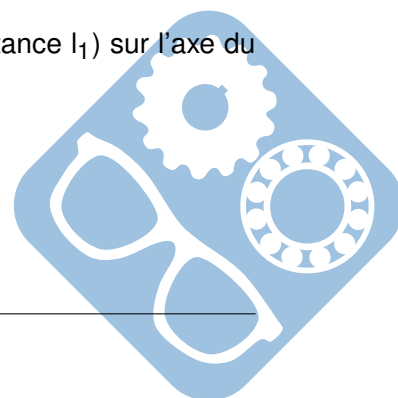
- $R_3 \rightarrow R$, angle θ_3 ,
- $R_4 \rightarrow R$, angle θ_4 ,
- $R_6 \rightarrow R$, angle θ_6 .

Question 3 : Déterminer la relation entre θ_3 et θ_4 .

Question 4 : En utilisant la fermeture géométrique $\vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AB}$, définir l_1 et θ_6 en fonction de θ_3 .

Question 5 : En utilisant une fermeture géométrique déterminer θ_3 en fonction de la longueur l_2 .

Question 6 : Montrer qu'il est possible de déterminer la position de l'écrou (distance l_1) sur l'axe du moteur en fonction de la hauteur du siège (distance l_2).



4 Maxpid

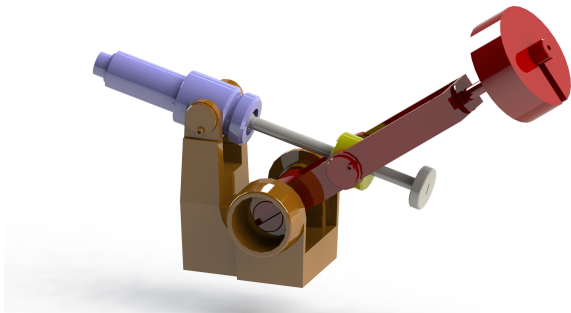
La chaîne fonctionnelle MAXPID est un sous-ensemble extrait d'un robot de récolte d'oranges développé par la société PELLENC S.A. de PERTUIS (Vaucluse).

Le robot repère et localise automatiquement une orange mûre. Une fois localisée, elle est saisie par une ventouse montée en bout du bras.

La saisie ne sera correcte que si la position du bras est parfaitement contrôlée : le bras doit alors se positionner à l'endroit voulu pour assurer un bon contact de la ventouse et de l'orange.

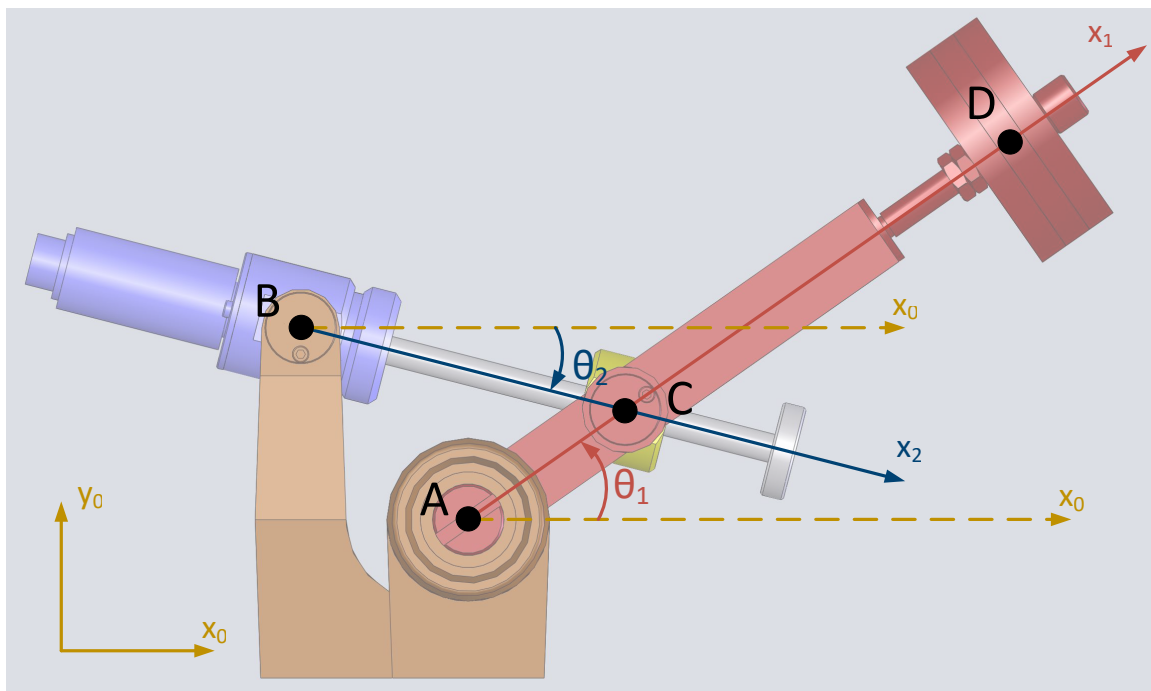


Le sous-système Maxpid est représenté sur les figures ci-dessous.



Pièces du Maxpid :

- 0. Chaise,
- 1. Bras + masses,
- 2. Bâti moteur,
- 3. Vis,
- 4. Écrou.



$$\begin{aligned} \vec{AB} &= -a.\vec{x}_0 + b.\vec{y}_0, \\ \vec{BC} &= l_1.\vec{x}_2, \\ \vec{AC} &= c.\vec{x}_1. \end{aligned}$$

Les variables a , b et c sont des constantes liées aux dimensions du système. La longueur l_1 varie en fonction de la position du système.

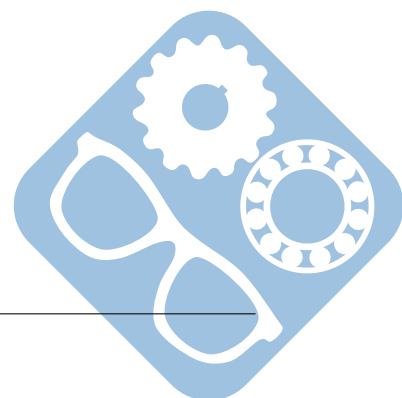
Question 1 : En utilisant une fermeture géométrique, déterminer l_1 en fonction de θ_1 et des dimensions du système.

Question 2 : Montrer que ce résultat peut se mettre sous la forme suivante.

$$l_1^2 - a^2 - b^2 - c^2 = X \cdot \cos Y \cdot \cos \theta_1 - X \cdot \sin Y \cdot \sin \theta_1$$

Déterminer X et Y en fonction des dimensions du système.

Question 3 : A partir de cette écriture, déterminer θ_1 en fonction de l_1 et des dimensions du mécanisme.



5 Correction

5.1 Rappels

5.1.1 Les bases du produit vectoriel

Question 1 : La norme du vecteur \vec{u} est $\|\vec{u}\| = \sqrt{8^2 + 5^2 + 4^2} = 10.25$

Question 2 : Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors :

$$\vec{u} = a \cdot \vec{v} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a \\ a \times y \\ a \times z \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc, } a = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \text{ donc } \begin{cases} y = 3.75 \\ z = 3 \end{cases}$$

Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, par définition : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y - 4z \\ 24 - 8y \\ 8x - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve les mêmes résultats.

5.1.2 Produit scalaire

Question 1 : $\|\vec{u}\| = \sqrt{18^2 + 7^2 + 13^2} = \sqrt{542} = 23.28$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{23^2 + 54^2 + 36^2} = \sqrt{4741} = 68.85$$

Question 2 : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ -54 \\ 36 \end{pmatrix} = 414 - 378 + 468 = 504$

Question 3 : $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = \sqrt{18^2 + 7^2 + 13^2} \times \sqrt{23^2 + 54^2 + 36^2} = \sqrt{542} \times \sqrt{4741} = 1603$

$$\text{Donc } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{504}{1603} \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 1.25 \text{ rad} = 71.67^\circ.$$

5.1.3 Produit vectoriel

Question 1 : $\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

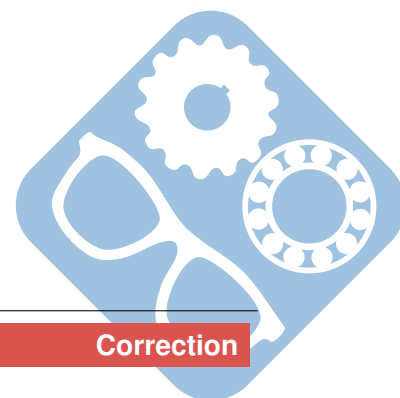
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 25 + 4} = \sqrt{30} = 5.48$$

Question 2 : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Question 3 : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{576 + 4 + 49} = \sqrt{629} = 25$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\text{Donc } \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{7\sqrt{30}}{\sqrt{629}} \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0.71 \text{ rad} = 40.8^\circ.$$



5.2 Machine de dépôt joint

Question 1 : On nomme ce robot : « un robot 6 axes » car il possède 6 degrés de liberté.

Question 2 : $\overrightarrow{O_0O_1} = a.\overrightarrow{x_1} + b.\overrightarrow{z_0} - f.\overrightarrow{y_1} = a.\overrightarrow{x_0} + b.\overrightarrow{z_0} - f.\overrightarrow{y_0}$

$$\overrightarrow{O_1O_2} = c.\overrightarrow{z_2}$$

$$\overrightarrow{O_2O_3} = d.\overrightarrow{x_3} + f.\overrightarrow{y_3} = d.\overrightarrow{x_3} + f.\overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{O_3O_4} = e.\overrightarrow{x_3} + h.\overrightarrow{y_4} = e.\overrightarrow{x_3} + h.\overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{O_4O_5} = g.\overrightarrow{x_5} = g.\overrightarrow{x_3}$$

$$\overrightarrow{O_5M} = -h.\overrightarrow{y_6} - l.\overrightarrow{z_6} = -h.\overrightarrow{y_0} - l.\overrightarrow{z_3}$$

Question 3 : D'après les figures de changement de repère de la figure 7, on constate :

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_2} = \cos(\theta_{12}).\overrightarrow{x_0} - \sin(\theta_{12}).\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{z_2} = \sin(\theta_{12}).\overrightarrow{x_0} + \cos(\theta_{12}).\overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_3} = \cos(\theta_{12} + \theta_{23}).\overrightarrow{x_0} - \sin(\theta_{12} + \theta_{23}).\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{z_3} = \sin(\theta_{12} + \theta_{23}).\overrightarrow{x_0} + \cos(\theta_{12} + \theta_{23}).\overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

Donc,

$$\overrightarrow{O_0M} = a.\overrightarrow{x_0} + b.\overrightarrow{z_0} + c.\overrightarrow{z_2} + (d + e + g).\overrightarrow{x_3} - l.\overrightarrow{z_3}$$

Enfin,

$$\overrightarrow{O_0M} = a.\overrightarrow{x_0} + b.\overrightarrow{z_0} + c.\sin(\theta_{12}).\overrightarrow{x_0} + c.\cos(\theta_{12}).\overrightarrow{z_0} + (d + e + g).\cos(\theta_{12} + \theta_{23}).\overrightarrow{x_0} - (d + e + g)\sin(\theta_{12} + \theta_{23}).\overrightarrow{z_0} - l.\sin(\theta_{12} + \theta_{23}).\overrightarrow{x_0} - l.\cos(\theta_{12} + \theta_{23}).\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{O_0M} = [a + c.\sin(\theta_{12}) + (d + e + g).\cos(\theta_{12} + \theta_{23}) - l.\sin(\theta_{12} + \theta_{23})] .\overrightarrow{x_0} + [b + c.\cos(\theta_{12}) - (d + e + g).\sin(\theta_{12} + \theta_{23}) - l.\cos(\theta_{12} + \theta_{23})] .\overrightarrow{z_0}$$

5.3 Chaise de dentiste

Question 1 : Mettre en place les repères suivants :

- $R_6(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ au point A,
- $R_3(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ au point D,
- $R_4(\overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_4})$ au point H.

Question 2 : Tracer les figures de changement de repère suivantes :

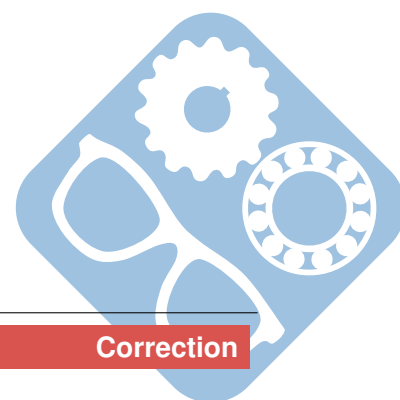
- $R_3 \rightarrow R$, angle θ_3 ,
- $R_4 \rightarrow R$, angle θ_4 ,
- $R_6 \rightarrow R$, angle θ_6 .

En déduire les équations vectorielles qui en découlent.

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_3} = \cos\theta_3.\overrightarrow{x_0} + \sin\theta_3.\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{y_3} = -\sin\theta_3.\overrightarrow{x_0} + \cos\theta_3.\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{z_3} = \overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_4} = \cos\theta_4.\overrightarrow{x_0} + \sin\theta_4.\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{y_4} = -\sin\theta_4.\overrightarrow{x_0} + \cos\theta_4.\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{z_4} = \overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_6} = \cos\theta_6.\overrightarrow{x_0} + \sin\theta_6.\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{y_6} = -\sin\theta_6.\overrightarrow{x_0} + \cos\theta_6.\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{z_6} = \overrightarrow{z_0} \end{cases}$$



Question 3 : Déterminer la relation entre θ_3 et θ_4 .

$$\overrightarrow{DE} \cdot \vec{x} = 0 = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) \cdot \vec{x} = (c \cdot \vec{x}_3 + c \cdot \vec{x}_4) \cdot \vec{x}$$

Donc, $c \cdot \cos\theta_3 + c \cdot \cos\theta_4 = 0$, donc $\cos\theta_3 = -\cos\theta_4$, donc $\theta_3 = \pi - \theta_4$.

Question 4 : En utilisant la fermeture géométrique $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$, définir l_1 et θ_6 en fonction de θ_3 .

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \quad a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + d \cdot \vec{x}_3 + e \cdot \vec{y}_3 = l_1 \cdot \vec{x}_6$$

$$a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} + d \cdot \cos\theta_3 \cdot \vec{x} + d \cdot \sin\theta_3 \cdot \vec{y} - e \cdot \sin\theta_3 \cdot \vec{x} + e \cdot \cos\theta_3 \cdot \vec{y} = l_1 \cdot \cos\theta_6 \cdot \vec{x} + l_1 \cdot \sin\theta_6 \cdot \vec{y}$$

$$\begin{cases} a + d \cdot \cos\theta_3 - e \cdot \sin\theta_3 = l_1 \cdot \cos\theta_6 \\ b + d \cdot \sin\theta_3 + e \cdot \cos\theta_3 = l_1 \cdot \sin\theta_6 \end{cases}$$

Calcul de l_1 :

$$(a + d \cdot \cos\theta_3 - e \cdot \sin\theta_3)^2 + (b + d \cdot \sin\theta_3 + e \cdot \cos\theta_3)^2 = (l_1 \cdot \cos\theta_6)^2 + (l_1 \cdot \sin\theta_6)^2$$

$$\text{Donc, } l_1 = \sqrt{(a + d \cdot \cos\theta_3 - e \cdot \sin\theta_3)^2 + (b + d \cdot \sin\theta_3 + e \cdot \cos\theta_3)^2}.$$

Calcul de θ_6 :

$$\frac{b + d \cdot \sin\theta_3 + e \cdot \cos\theta_3}{a + d \cdot \cos\theta_3 - e \cdot \sin\theta_3} = \frac{l_1 \cdot \sin\theta_6}{l_1 \cdot \cos\theta_6}$$

$$\text{Donc, } \theta_6 = \arctan\left(\frac{b + d \cdot \sin\theta_3 + e \cdot \cos\theta_3}{a + d \cdot \cos\theta_3 - e \cdot \sin\theta_3}\right).$$

Question 5 : En utilisant une fermeture géométrique déterminer θ_3 en fonction de la longueur l_2 .

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} \quad l_2 \cdot \vec{y} = c \cdot \vec{x}_3 + c \cdot \vec{x}_4$$

$$l_2 = c \cdot \sin\theta_3 + c \cdot \sin\theta_4, \text{ avec } \theta_4 = \pi - \theta_3, \text{ donc}$$

$$l_2 = 2 \cdot c \cdot \sin\theta_3, \text{ donc } \theta_3 = \arcsin\left(\frac{l_2}{2 \cdot c}\right)$$

Question 6 : Montrer qu'il est possible de déterminer la position de l'écrou (distance l_1) sur l'axe du moteur en fonction de la hauteur du siège (distance l_2).

$$\text{Bilan des équations : } \begin{cases} \theta_3 = \arcsin\left(\frac{l_2}{2 \cdot c}\right) \\ l_1 = \sqrt{(a + d \cdot \cos\theta_3 - e \cdot \sin\theta_3)^2 + (b + d \cdot \sin\theta_3 + e \cdot \cos\theta_3)^2} \\ \theta_6 = \arctan\left(\frac{b + d \cdot \sin\theta_3 + e \cdot \cos\theta_3}{a + d \cdot \cos\theta_3 - e \cdot \sin\theta_3}\right) \end{cases}$$

L'équation 1 permet de déterminer θ_3 en fonction de l_2 et l'équation 2 permet de déterminer l_1 en fonction de θ_3 . Il est donc possible de déterminer l_2 en fonction de l_1 .

5.4 Maxpid

Question 1 : En utilisant une fermeture géométrique, déterminer l_1 en fonction de θ_1 et des dimensions du système.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

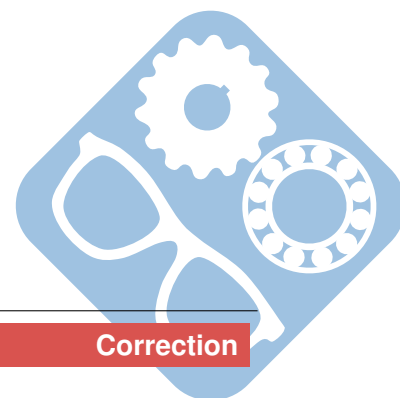
$$-a \cdot \vec{x}_0 + b \cdot \vec{y}_0 + l_1 \cdot \vec{x}_2 = c \cdot \vec{x}_1$$

$$-a \cdot \vec{x}_0 + b \cdot \vec{y}_0 + l_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \vec{x}_0 + l_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \vec{y}_0 = c \cdot \cos\theta_1 \cdot \vec{x}_0 + c \cdot \sin\theta_1 \cdot \vec{y}_0$$

$$\begin{cases} -a + l_1 \cdot \cos\theta_2 = c \cdot \cos\theta_1 \\ b + l_1 \cdot \sin\theta_2 = c \cdot \sin\theta_1 \end{cases}$$

$$b + l_1 \cdot \sin\theta_2 = c \cdot \sin\theta_1$$

$$l_1^2 = (c \cdot \cos\theta_1 + a)^2 + (c \cdot \sin\theta_1 - b)^2$$



Question 2 : Montrer que ce résultat peut se mettre sous la forme : $l_1^2 - a^2 - b^2 - c^2 = X \cdot \cos Y \cdot \cos \theta_1 - X \cdot \sin Y \cdot \sin \theta_1$. Déterminer X et Y en fonction des dimensions du système.

$$l_1^2 = (c \cdot \cos \theta_1)^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \theta_1 + (c \cdot \sin \theta_1)^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \theta_1$$

$$l_1^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \theta_1 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \theta_1$$

$$l_1^2 - a^2 - b^2 - c^2 = X \cdot \cos Y \cdot \cos \theta_1 - X \cdot \sin Y \cdot \sin \theta_1$$

$$\text{On peut écrire : } \begin{cases} X \cdot \cos Y = 2 \cdot a \cdot c \\ X \cdot \sin Y = 2 \cdot b \cdot c \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 2 \cdot c \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \\ Y = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

Question 3 : A partir de cette écriture, déterminer θ_1 en fonction de l_1 et des dimensions du mécanisme.

$$l_1^2 - a^2 - b^2 - c^2 = X \cdot \cos(\theta_1 + Y)$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{l_1^2 - a^2 - b^2 - c^2}{X}\right) - Y$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{l_1^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2 \cdot c \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}\right) - \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

